UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FOGGIA
Dipartimento di Agraria
Cdl in Ingegneria dei Sistemi Logistici per l'Agroalimentare

Corso integrato di Sistemi di Elaborazione

Modulo I

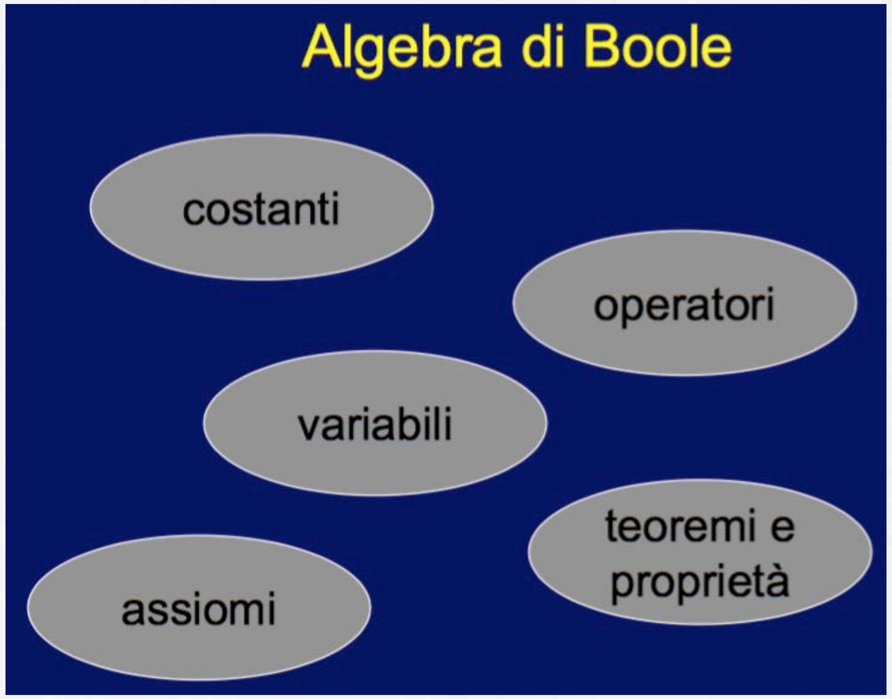
Prof. Crescenzio Gallo
crescenzio.gallo@unifg.it

L'Algebra di Boole

Valori di verità e operatori

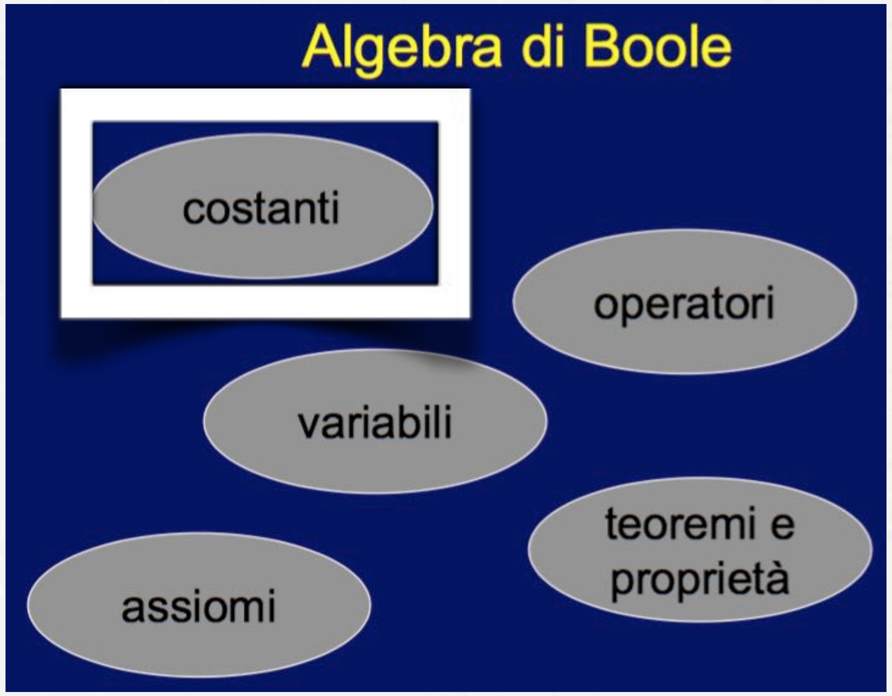
Algebra booleana

- Valori: FALSE(=0); TRUE(=1); operatori: NOT, AND, OR
- Applicazioni:
  - analisi dei circuiti digitali (descrizione del funzionamento in modo economico);
  - sintesi (progettazione) dei circuiti digitali (data una certa funzione logica, svilupparne una implementazione efficiente).



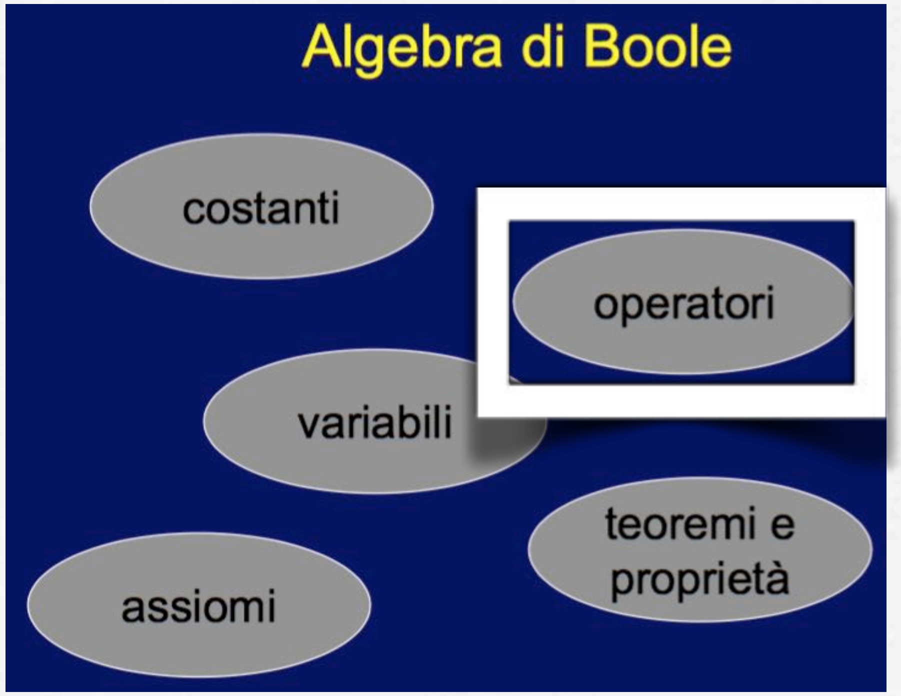
Costanti

- L'algebra di Boole si basa su due soli valori, normalmente indicati con 0 (FALSO) ed 1 (VERO).
- Sono anche detti "valori logici", e corrispondono ai valori che possono assumere i bit.



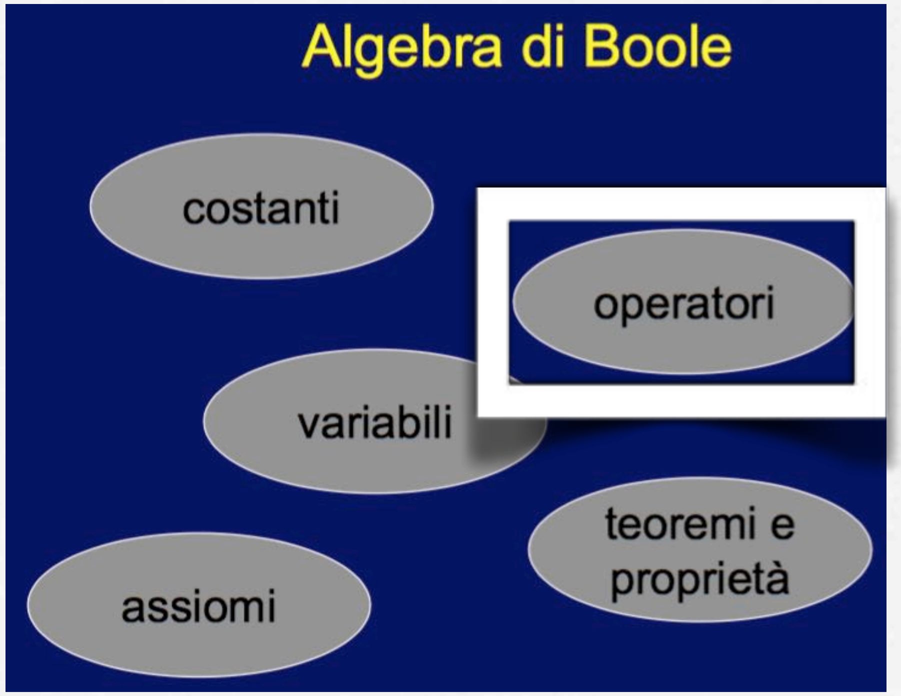
Operatori

- Sono definiti da tabelle che esaustivamente ne descrivono il comportamento (il numero di combinazioni di valori di ingresso è finito)
- Le tabelle vengono dette "tavole di verità"
- Spesso si utilizzano anche descrizioni di tipo funzionale



Operatori

- Si possono utilizzare diverse notazioni:
  - porte logiche (corrispondono ai dispositivi elettronici che svolgono la funzione dell'operatore);
  - notazione algebrica;
  - tavole di verità;
  - mappe di Karnaugh.



Operatore NOT

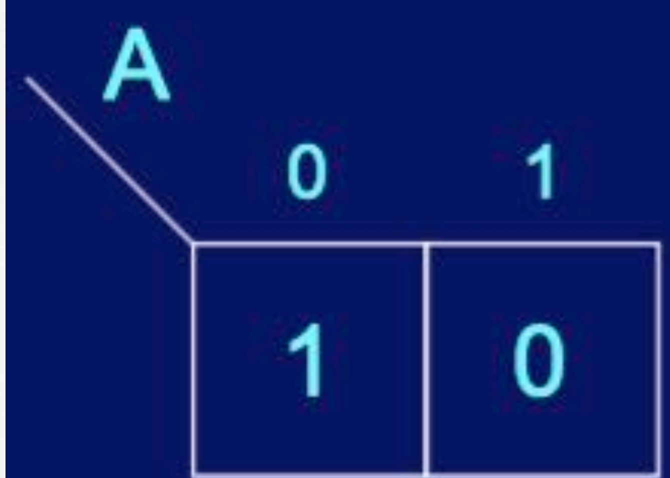
$U = \overline{A}$

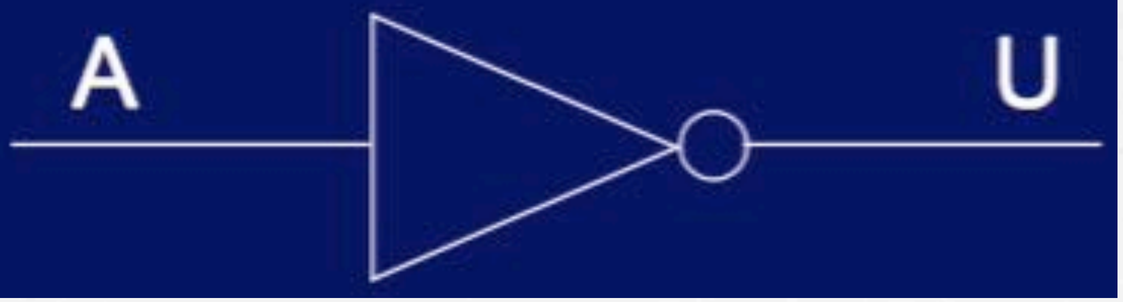
$U = \mathit{NOT}\ A$

$U = A'$

$U = \neg A$

A	U
0	1
1	0





Operatore AND

$U = AB$

$U = A \bullet B$

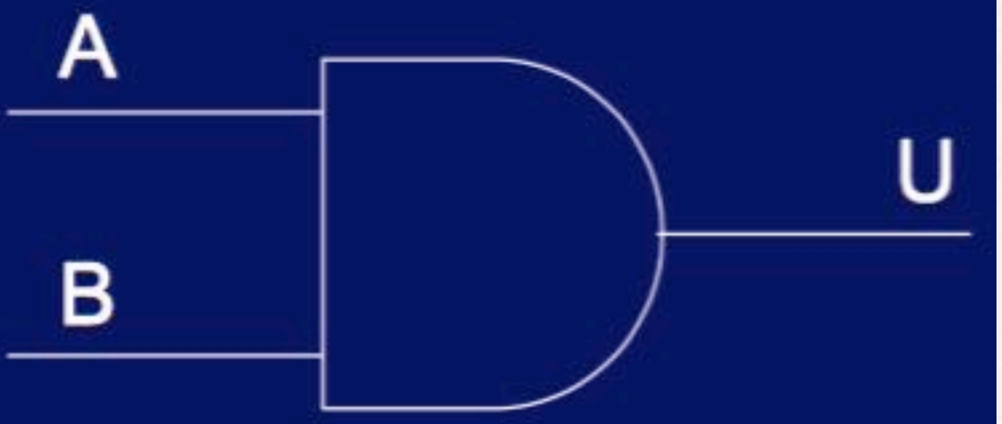
$U = A \; AND \; B$

$U = A \wedge B$

A	B	U
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A·B = 0 se almeno un ingresso vale 0
A·B = 1 se entrambi gli ingressi valgono 1

B \ A	0	1
0	0	0
1	0	1



Operatore OR

$U = A+B$

$U = A \ OR \ B$

$U = A \vee B$

A	B	U
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A+B = 1 se almeno un ingresso vale 1
A+B = 0 se entrambi gli ingressi valgono 0

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

Priorità degli operatori

- Priorità
  - In assenza di parentesi, AND ha la priorità sull'OR ed il NOT su entrambi:

NOT → AND → OR

- Esempi:

$$A \text{ OR } B \text{ AND } C = A + B \cdot C = A + (B \cdot C)$$

$$\text{NOT } A \text{ AND } C = \text{NOT } A \cdot C = (\text{NOT } A) \cdot C = \overline{A} \cdot C$$

Dualità e postulati

- Principio di dualità
  se un'espressione booleana è vera, lo è anche la sua duale

  il DUALE di un'espressione booleana si ottiene:
  - scambiando **AND** con **OR**
    (OR→AND , AND→OR)
  - scambiando **TRUE (1)** con **FALSE (0)**
    (0→1 , 1→0)

- Postulati
  - Le proprietà commutativa, distributiva, identità, inverso sono postulati: assunti veri per definizione.
  - Le altre proprietà sono teoremi dimostrabili.

Proprietà degli operatori

	AND	OR (duale)
• Identità	$1 \cdot x = x$	$0 + x = x$
• Elemento 0	$0 \cdot x = 0$	$1 + x = 1$
• Idempotenza	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
• Inverso	$x \cdot \sim x = 0$	$x + \sim x = 1$
• Commutativa	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
• Associativa	$(x \cdot y)\, z = x\, (y \cdot z)$	$(x+y) + z = x + (y+z)$
	AND rispetto a OR	**OR rispetto a AND**
Distributiva	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x + y \cdot z = (x+z) \cdot (x+y)$
I assorbimento	$x \cdot (x + y) = x$	$x + x \cdot y = x$
II assorbimento	$x \cdot (\sim x + y) = xy$	$x + \sim x \cdot y = x + y$
• De Morgan	$\overline{(xy)} = \bar{x} + \bar{y}$	$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Operatore NAND

$U = \overline{AB}$

$U = \overline{A \cdot B}$

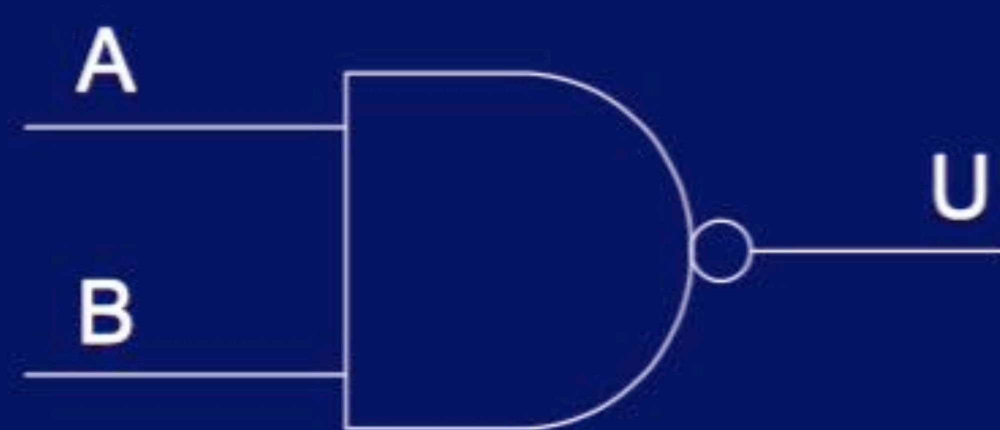
$U = A$ *NAND* B

$U = \neg (A \cdot B)$

ecc.

A	B	U
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

B \ A	0	1
0	1	1
1	1	0



Operatore NOR

$U = \overline{A+B}$

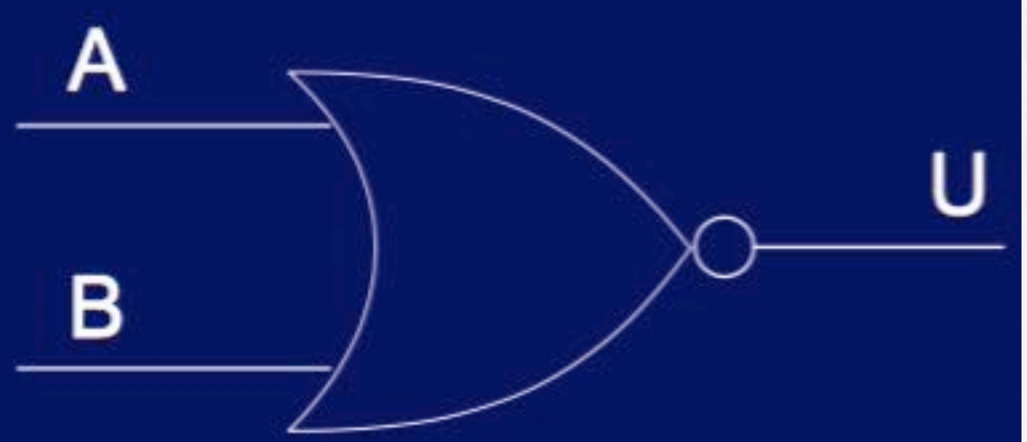
$U = A$ *NOR* B

$U = \neg(A+B)$

ecc.

A	B	U
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

B \ A	0	1
0	1	0
1	0	0



Operatore XOR

$U = A \oplus B$

$U = A$ *XOR* B

A	B	U
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

mappa a scacchiera

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	0

Operatore XOR

$$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

Tre possibili descrizioni funzionali:

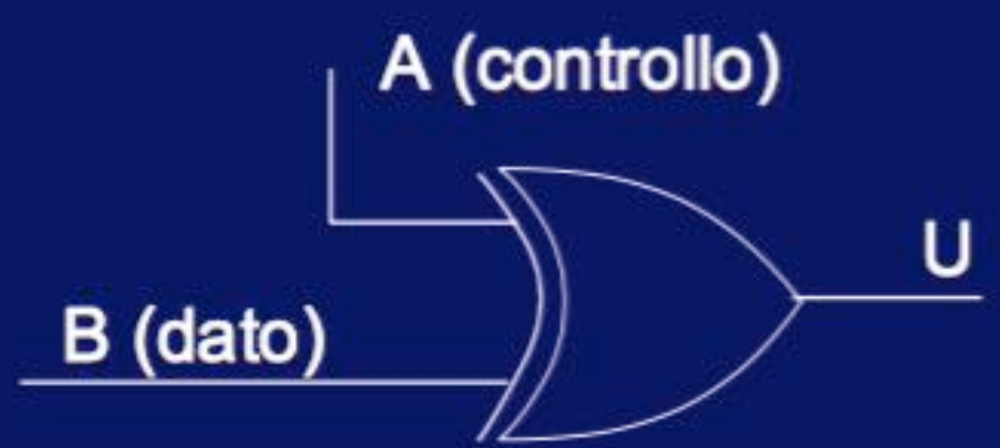
1. complementare pilotato
2. comparatore
3. generatore di parità

Operatore XOR

$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$ (complementatore pilotato)

se $A = 0 \rightarrow U = B$

se $A = 1 \rightarrow U = \overline{B}$



Operatore XOR

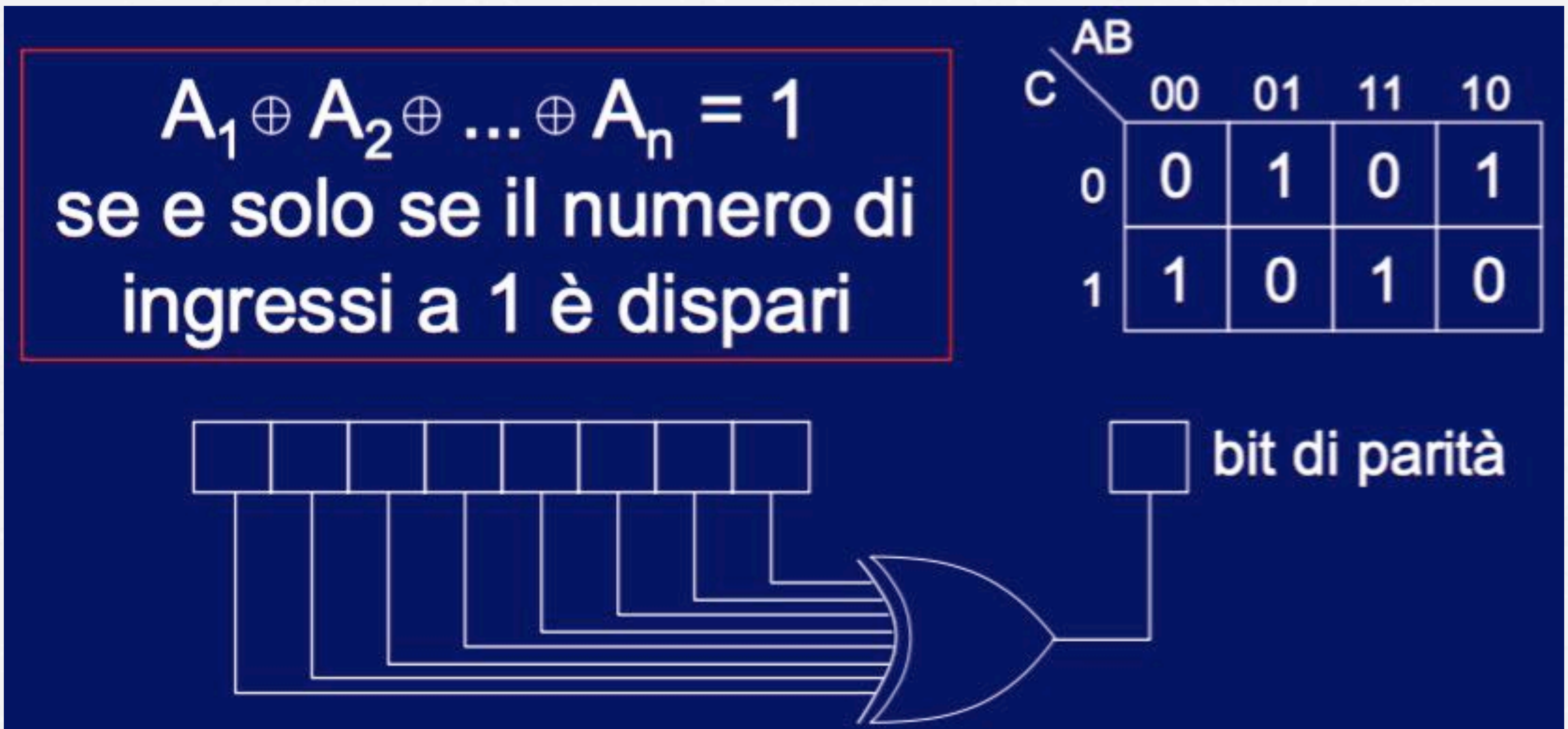
$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B \text{ (comparatore)}$$

se $A = B \rightarrow U = 0$

se $A \neq B \rightarrow U = 1$

Operatore XOR

$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$ (generatore di parità)



Porte logiche

Porte universali

Quale è il numero minimo di porte con cui è possibile implementare tutte le altre?

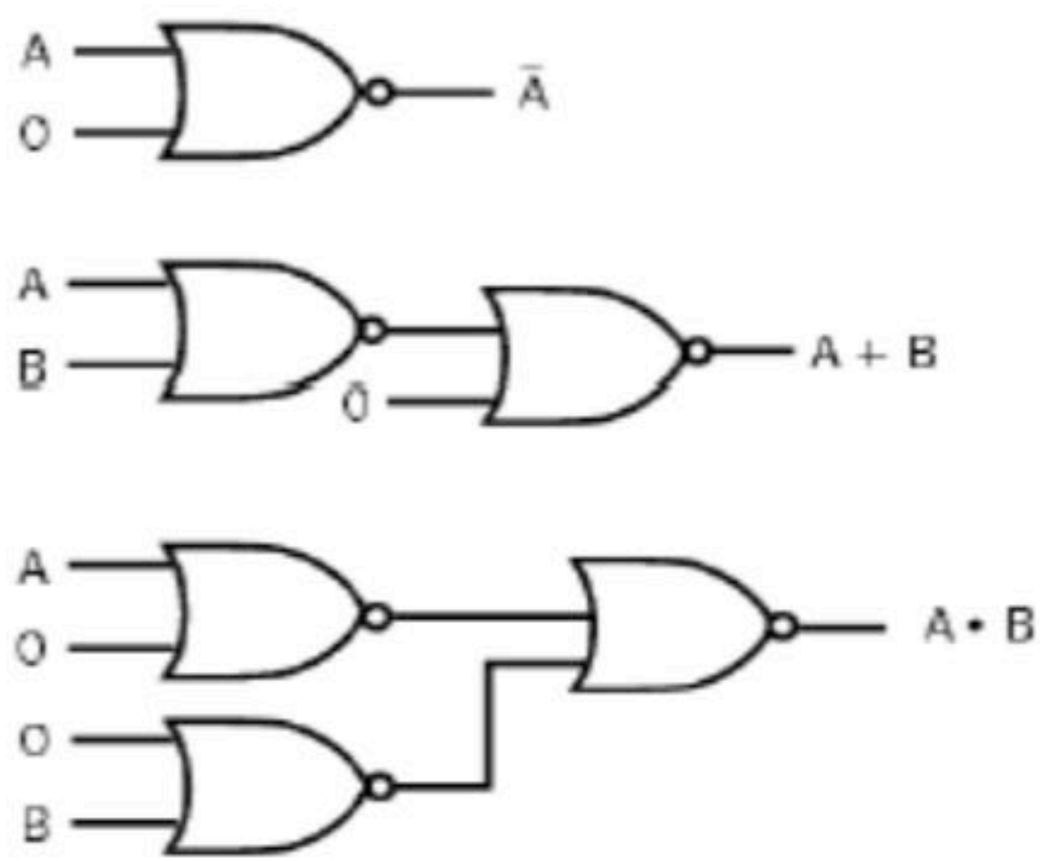
- Con la legge di De-Morgan riusciamo a passare da 3 a 2:
  - con NOT e AND si ottiene OR:

NOT(NOT(**A**) AND NOT(**B**)) = **A** OR **B**

- E' possibile usarne una sola?
  - Sì, ad esempio la porta **NAND** e la **NOR** che sono chiamate **porte universali**

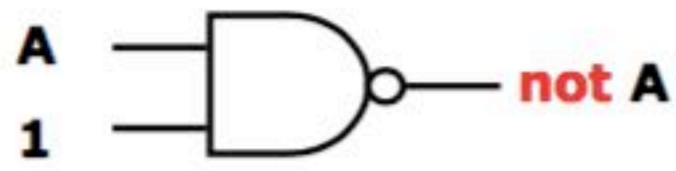
Porta universale NOR

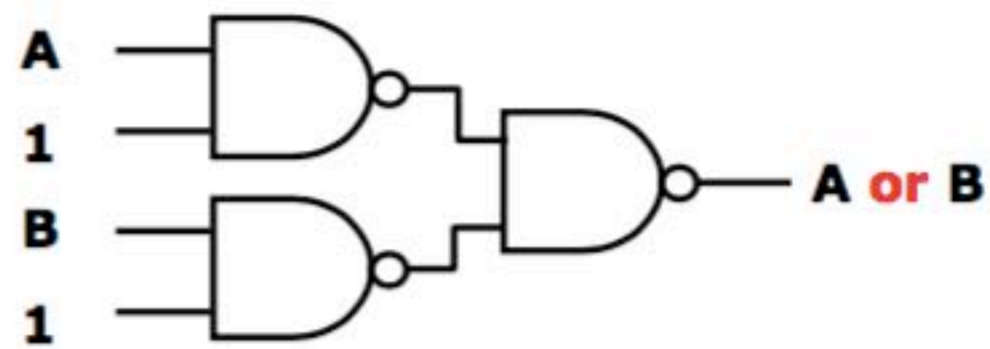
NOT A	=	0 NOR A = A NOR A
A OR B	=	(A NOR B) NOR 0
A AND B	=	(A NOR 0) NOR (B NOR 0)

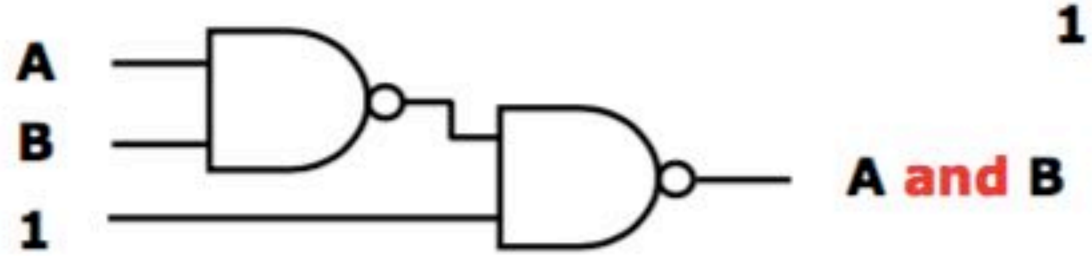


Porta universale NAND

NOT A	=	1 NAND A = A NAND A
A AND B	=	(A NAND B) NAND 1
A OR B	=	(A NAND 1) NAND (B NAND 1)







Sintesi di circuiti combinatori

Funzioni logiche

Esempio: $$F(A,B,C) = A \cdot B + B \cdot \overline{C}$$

3 variabili: $F = f(A,B,C)$ → $2^3 = 8$ combinazioni possibili delle variabili

Circuito logico

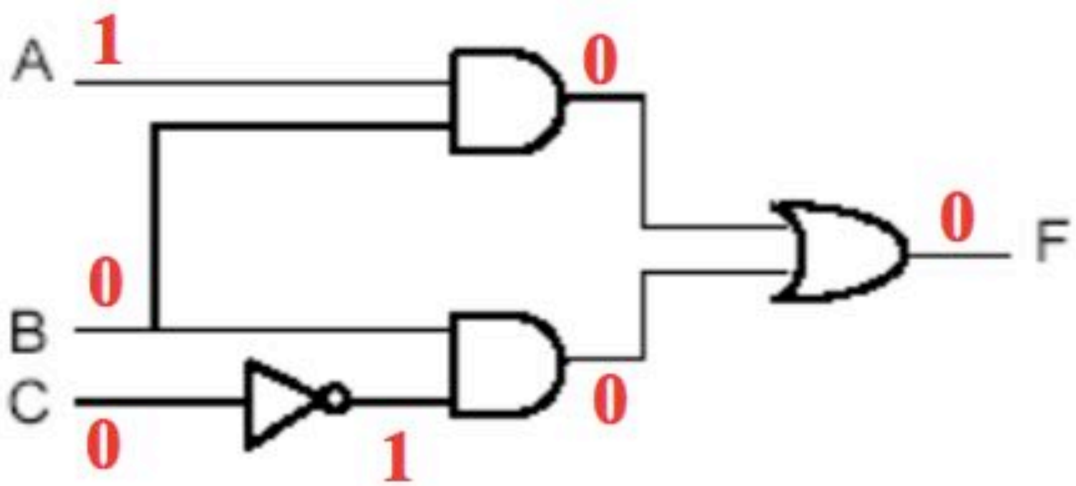


Tabella di verità

A	B	C	A•B	B•not C	F
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	**0**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	0	**1**

*Data una funzione **F**,*
*esistono **infinite espressioni** e **infiniti circuiti**,*
*ma **una sola tabella di verità** che la rappresenta.*

Sintesi di circuiti logici

Problema della sintesi (progetto) di circuiti combinatori:

Come passare **da tabella di verità**

a espressione logica circuito digitale?

Data la tabella di verità:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	**1**	**0**	**1**
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

F = 1 ***se e solo se:***

A = 0 AND B = 1 AND C = 0

OR

A = 1 AND B = 1 AND C = 0

OR

A = 1 AND B = 1 AND C = 1

Sintesi di circuiti logici

F = 1 ***se e solo se:***

A = 0 AND B = 1 AND C = 0

OR

A = 1 AND B = 1 AND C = 0

OR

A = 1 AND B = 1 AND C = 1

$F = 1$ se e solo se:

$\left(\overline{A} = 1 \text{ and } B = 1 \text{ and } \overline{C} = 1\right)$ or

$\left(A = 1 \text{ and } B = 1 \text{ and } \overline{C} = 1\right)$ or

$\left(A = 1 \text{ and } B = 1 \text{ and } C = 1\right)$

$F = 1$ se e solo se: $\overline{A}B\overline{C} = 1$ or $AB\overline{C} = 1$ or $ABC = 1$

$F = 1$ se e solo se: $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC = 1$

$$\boxed{F = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$$

La I forma canonica

$$F = A \cdot B + B \cdot \overline{C} = \boxed{\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Implicante:
Prodotto delle variabili (in forma naturale o negata) per le quali la funzione vale 1

Mintermine m_j:
implicante che contiene tutte le *n* variabili della funzione (e.g. ABC).

$$\text{Prima forma canonica (SoP)}: \quad F = \sum_{j=1}^{Q} m_j \quad , \quad Q \le 2^n$$

Prima forma canonica (SoP) di **F**:
la **somma logica** dei suoi **mintermini**

Somma di prodotti

Considero i MINTERMINI (casi in cui: **F = 1**)

- MINTERMINI: prodotti di tutte le variabili, con le variabili **NEGATE** se nella tabella di verità sono **0**, **NATURALI** se sono **1**

$$\text{Prima forma canonica (SoP)}: \quad F = \sum_{j=1}^{Q} m_j \quad , \quad Q \le 2^n$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

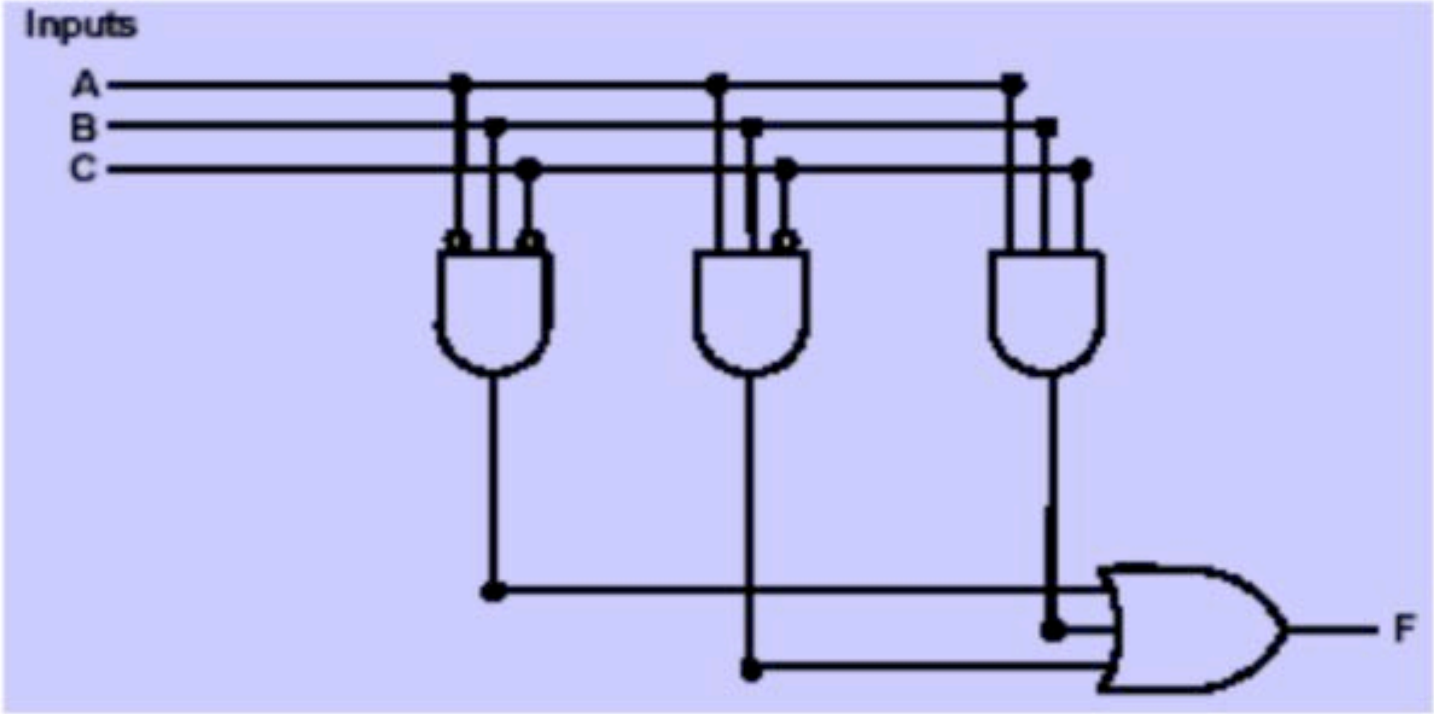
$$F = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

I forma canonica: dall'espressione al circuito

$$F = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Circuito a **due stadi**:

1. Stadio **AND**: **Q porte AND a n ingressi**, una per ogni mintermine
2. Stadio **OR**: **1 porta OR a Q ingressi**



Esercizio: funzione maggioranza

Funzione logica di 3 variabili ➔ 3 ingressi, 1 uscita

1. Costruzione tabella di verità o espressione logica
2. Trasformazione a forma SOP
3. Eventuale semplificazione

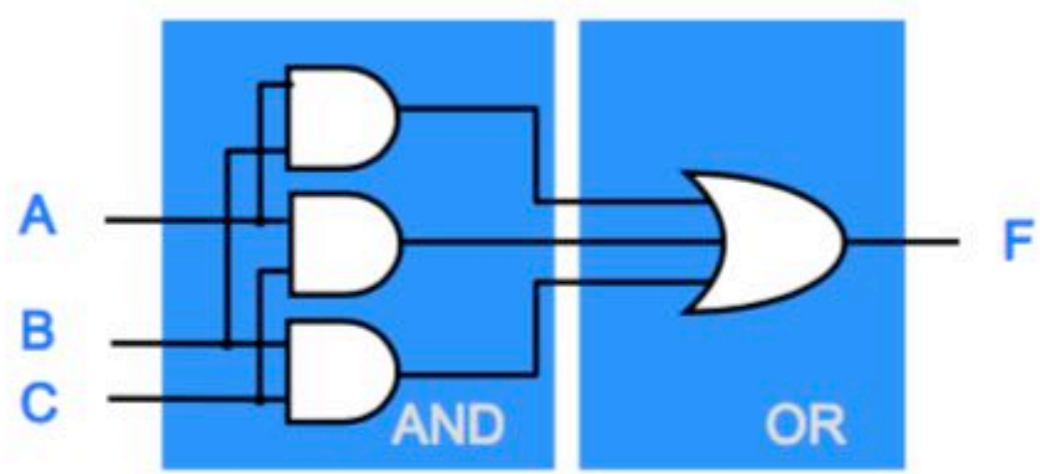
$$F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC =$$

$$= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC + ABC + ABC =$$

$$= AB\left(C + \overline{C}\right) + AC\left(B + \overline{B}\right) + BC\left(A + \overline{A}\right) =$$

$$= AB + AC + BC$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



II forma canonica

Seconda forma canonica di ***F(A,B,C)***:

- Approccio DUALE rispetto alla I forma canonica: considero i casi in cui: **F = 0**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

F = 0 *se e solo se:*

A=0 and B=0 and C=0
OR
A=0 and B=0 and C=1
OR
A=0 and B=1 and C=1
OR
A=1 and B=0 and C=0
OR
A=1 and B=0 and C=1

Sintesi della funzione logica

F = 0 *se e solo se:*

A=0 and B=0 and C=0 OR
A=0 and B=0 and C=1 OR
A=0 and B=1 and C=1 OR
A=1 and B=0 and C=0 OR
A=1 and B=0 and C=1

$F = 0$ se e solo se:

$\left(\overline{A} = 1 \text{ and } \overline{B} = 1 \text{ and } \overline{C} = 1\right)$ or

$\left(\overline{A} = 1 \text{ and } \overline{B} = 1 \text{ and } C = 1\right)$ or

$\left(\overline{A} = 1 \text{ and } B = 1 \text{ and } C = 1\right)$ or

$\left(A = 1 \text{ and } \overline{B} = 1 \text{ and } \overline{C} = 1\right)$ or

$\left(A = 1 \text{ and } \overline{B} = 1 \text{ and } C = 1\right)$

$$F = 0 \text{ se e solo se: } \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = 1 \text{ or } \overline{A}\,\overline{B}C = 1 \text{ or } \overline{A}BC = 1 \text{ or } A\overline{B}\,\overline{C} = 1 \text{ or } A\overline{B}C = 1$$

$$F = 0 \text{ se e solo se: } \left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C\right) = 1$$

$$\boxed{\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C}$$

II forma canonica

Nuova definizione di **F:**

- Elenco dei termini per cui: **F = 0 → ~F = 1**

$$\overline{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{W} M_i \quad , \quad W \leq 2^N$$

Maxtermine, M_j:

Prodotto di tutte le variabili di ingresso al quale corrisponde un valore di funzione F = 0

I forma can.: $F = \sum_{j=1}^{Q} m_j \quad , \quad Q \leq 2^N \longrightarrow \quad \boxed{Q + W = 2^N}$

II forma canonica

Esprimiamo F come: **somma di MAX-termini:**

$$F = A \cdot B + B \cdot \overline{C}$$

$$\overline{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{W} M_i$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

II forma canonica: PoS

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

- Negando entrambi i membri
  ed applicando il II teorema di De Morgan si ottiene:

$$\overline{\overline{F}} = F = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

II Forma Canonica – PoS (Product of Sums):
Prodotto delle somme rappresentanti i
MAXtermini negati

In generale:

$$\overline{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{W} M_i, \quad W \leq 2^N$$

$$\boxed{\overline{\overline{\mathrm{F}}} = \mathrm{F} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{W} M_i\right)} = (2^\circ\ \text{Th. De Morgan}) = \prod_{i=1}^{W} \overline{M_i}}$$

$$M_i = a \cdot b \cdot c \longrightarrow \overline{M_i} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

Somma di prodotti

- I termini-somma sono i casi in cui: **F = 0**

$$\overline{M_i} = 0 \longrightarrow F = 0, \quad \forall i = 1..N$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

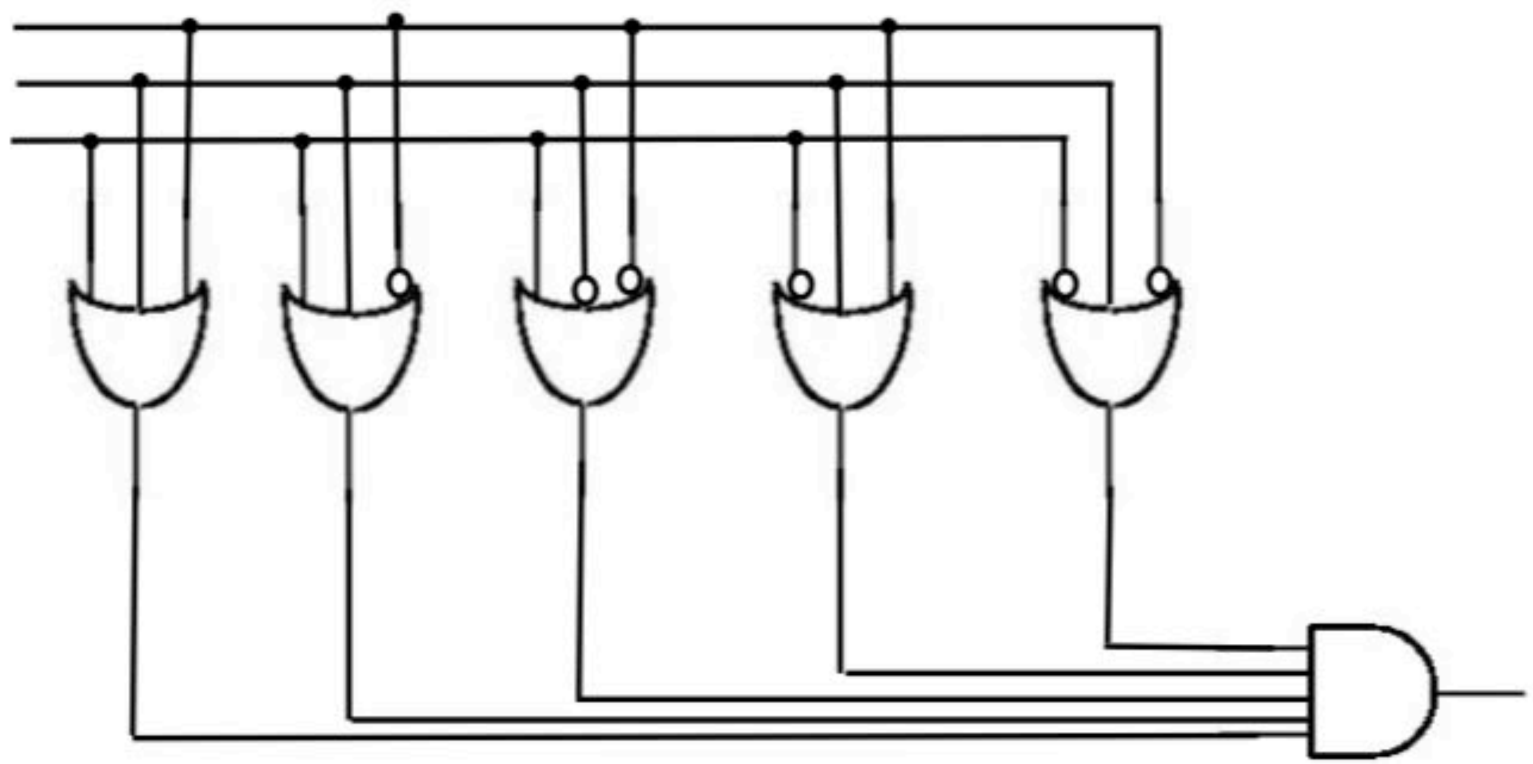
$$F =$$
$$= (A + B + C) \cdot$$
$$\cdot (A + B + \overline{C}) \cdot$$
$$\cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot$$
$$\cdot (\overline{A} + B + C) \cdot$$
$$\cdot (\overline{A} + B + \overline{C})$$

Circuito in II forma canonica: PoS

Circuito a **due stadi**:

1. Stadio **OR**: **W porte OR a n ingressi,** una per ogni MAXtermine
2. Stadio **AND**: **1 porta AND a W ingressi**

$$F = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$



Valutazione di un circuito

Criteri di valutazione delle prestazioni:

Semplicità (area)

- numero di porte in totale

Velocità (tempo di commutazione)

- numero di porte attraversate

Soddisfazione di altri vincoli

- potenza dissipata,
- facilità di debug...